1 Метрики, нормы, скалярные произведения

1. Показать, что если функционал $\rho(\cdot,\cdot) : \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{R}^1$ удовлетворяет паре свойств:

а) $\rho(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$;

б) $\rho(u,v)\leqslant\rho(u,w)+\rho(v,w)\ \forall u,v,w\in\mathbb{M}$,

то пространство $\mathbb{M}$ является метрическим, а функционал ρ будет его метрикой.

2. Пусть $\rho(x,y)$ — метрика пространства $\mathbb{M}$, полного относительно неё. Доказать, что функционалы

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\quad \rho_2(x,y)=\ln(1+\rho(x,y)),\quad \rho_3(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$$

также будут являться метриками пространства $\mathbb{M}$. Будет ли оно полным относительно этих метрик?

1. Является ли $||x||_{\ell^2}$ нормой в ℓ^1?

2. Является ли $||x||_{\ell^1}$ нормой в ℓ^2?

3. Является ли $||f||_{L^2(a,b)}$ нормой в $L^1(a,b)$?

4. Является ли $||f||_{L^1(a,b)}$ нормой в $L^2(a,b)$?

5. Является ли $||f||_{C[a,b]}$ нормой в $L^1(a,b)$ или $L^2(a,b)$?

6. Является ли функционал $n(x)=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{2n-1}^2+\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{2n}\right)^2}$ нормой в ℓ^2?

7. Является ли функционал $n(f)=\int\limits_{-1}^{0}|f(x)|\,dx+\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ нормой в $C[-1,1]$?

8. Является ли функционал $s(f,g)=\int\limits_0^1 f(t)g(1-t)\,dt$ скалярным произведением в $L^2(0,1)$?

9. Является ли функционал $s(f,g)=\int\limits_0^1 f(t^2)g(t^2)\,dt$ скалярным произведением в $L^2(0,1)$?

10. Является ли функционал $s(f,g)=\int\limits_a^b f'(t)g'(t)\,dt$ скалярным произведением в $H^1(a,b)$?

11. Является ли функционал $s(f,g)=f(a)g(a)+f(b)g(b)+\int\limits_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$ скалярным произведением в $H^1(0,1)$?

12. Является ли функционал $s(f,g)=\left(\int\limits_{-1}^{0}f(x)\,dx\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}g(x)\,dx\right)+\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ скалярным произведением в $C[-1,1]$?

13. Является ли функционал $s(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{2n-1}y_{2n-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{2n} + \frac{x_{2n-1}}{2n-1}\right)\left(y_{2n} + \frac{y_{2n-1}}{2n-1}\right)$ скалярным произведением в ℓ^2?

2 Свойства функционалов

1. Пользуясь непосредственно определением выпуклости, доказать, что функция $y = x^4$ выпукла на всей числовой прямой, а функция $y = 1/x^2$ выпукла на множестве $(0, +\infty)$.

2. Исследовать на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу и слабую полунепрерывность снизу функционалы:

$$J_1(u) = \int\limits_a^b u^4(t)\,dt \text{ и } J_2(u) = \left(\int\limits_a^b u(t)\,dt\right)^4 \text{ в пространстве } L^2(a,b);$$

$$J_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2,\ J_4(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}\right)^2 \text{ и } J_5(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{2n-1}}{2n-1}\right)^2 \text{ в пространстве } l^2.$$

Проверить, применим ли какой-либо из приведенных вариантов теоремы Вейерштрасса, а также найти J_* и U_* в задачах:

1. $J(u) = u^2 \to \inf\limits_{u\in U}$, $U = (0,1]$ или $U = (-1,1)$;
2. $J(u) = \int\limits_{-1}^{0} u(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1} u(t)\,dt \to \inf\limits_{u\in U}$, $U = \{u \in C[-1,1] \mid ||u||_{C[-1,1]} \leqslant 1\}$.
3. $J(u) = \int\limits_{-1}^{1} u^2(t) - c(t)u(t)\,dt \to \inf\limits_{u\in U}$, $U = \{u \in L^2[-1,1] \mid ||u||_{L^2[-1,1]} \leqslant 1\}$, $||c||_{L^2[-1,1]} = 1$.
4. $J(x) = ||x||^2_{\ell^2} \to \inf\limits_{x\in X}$, $X = \{x \in \ell^2 \mid \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x_n^2 \geqslant 1\}$.

3 Дифференцирование по Фреше

Вычислить градиент и гессиан, найти первую и вторую производные по Фреше следующих функционалов:

1. $J(u) = \left(\int\limits_0^1 u(t)\,dt\right)^p$, $u(t) \in L^2(0,1)$, $p \in \mathbb{R}$.
2. $J(u) = \int\limits_0^{1/2} u^2(t)\,dt$, $u(t) \in L^2(0,1)$.
3. $J(u) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{t^3} u(s)\,ds\right)^2 dt$, $u(t) \in L^2(0,1)$.

4. $J(u) = \int\limits_0^1 tu(t) \int\limits_0^t u(s)\,ds\,dt$, $u(t) \in L^2(0,1)$.
5. $J(u) = \int\limits_0^1 u(t)u(\sqrt{t})\,dt$, $u(t) \in L^2(0,1)$.
6. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}x_n$, $x \in \ell^2$.
7. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2$, $x \in \ell^2$.
8. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n x_{n+1}$, $x \in \ell^2$.
9. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right)$, $x \in \ell^2$.
10. $J(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{2n+1} \cdot \left(x_{2n} - \frac{x_{2n-1}}{2} \right) \right)^2$, $x \in \ell^2$.

4 Градиенты в задачах ОУ

1. Рассматривается линейная динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{gathered} 0 \leqslant t \leqslant T,\ A(t) \in L^\infty_{n\times n}[0,T], B(t) \in L^\infty_{n\times m}[0,T], \\ x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T, \\ u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))^T \subseteq L^2_m[0,T], x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{gathered}$$

Вывести схемы вычисления на всём пространстве $L^2_m[0,T]$ градиентов функционалов

$$J_1(u) = ||x(t_0;u) - z||^2_{\mathbb{R}^n},\ 0 < t_0 < T;$$

$$J_2(u) = \sum_{i=1}^{N} ||x(t_i;u) - z_i||^2_{\mathbb{R}^n},\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < T;$$

$$J_3(u) = \int_{t_1}^{t_2} ||x(t;u) - z(t)||^2_{\mathbb{R}^n}\,dt,\ 0 < t_1 < t_2 < T;$$

$$J_4(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_i}^{t_i} ||x(t;u) - z(t)||^2_{\mathbb{R}^n}\,dt,\ 0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_N < t_N < T,$$

где z_i, z — заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, $z(t)$ — заданная функция из $L^2_n[0,T]$.

2. Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} -(k(x)y'(x))' + q(x)y(x) = u(x),\ x \in (0,l), \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases}$$

где $u(x), k(x), q(x)$ — заданные функции из $L^2[0,l]$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0\ \forall x \in [0,l]$.

а) Вывести схему вычисления первой и второй производной по Фреше на всем пространстве $L^2[0,l]$ функционала ($f(x)$ — заданная функция из $L^2[0,l]$)

$$J(u) = \int\limits_0^l (y(x;u) - f(x))^2\ dt.$$

б) Тот же вопрос, если граничные условия имеют вид $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$ (II рода) или $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(l) = \beta y(l)$ (III рода).

в) Заменить дифференциальное уравнение исходной динамической системы на уравнение $-(k(x)y'(x))' + a(x)y'(x) + q(x)y(x) = u(x)$, после чего выполнить задания пунктов а) и б).

3. Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} -\Delta y(x_1,x_2) + q(x_1,x_2)y(x_1,x_2) = u(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \Pi = (0,l_1) \times (0,l_2), \\ y|_{\partial\Pi} = 0, \end{cases}$$

где $q(x_1,x_2)$ — заданная функция из $L^2(\Pi)$.

а) Вывести схему вычисления первой и второй производной по Фреше на всём пространстве $L^2(\Pi)$ функционала ($f(x_1,x_2)$ — заданная функция из $L^2(\Pi)$)

$$J(u) = \iint\limits_{\Pi} (y(x_1,x_2;u) - f(x_1,x_2))^2\ dt.$$

б) Тот же вопрос, если граничное условие имеет вид $y|_{\partial\Pi} = u(x_1,x_2)$, а дифференциальное уравнение имеет вид $-\Delta y(x_1,x_2) + q(x_1,x_2)y(x_1,x_2) = 0$.

4. Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} y_t(t,x) = a^2 y_{xx}(t,x) + u(t,x),\ (t,x) \in \Pi = (0,T) \times (0,l), \\ y(t,0) = 0,\ y(t,l) = 0, \\ y(0,x) = y_0(x), \end{cases}$$

где a — константа, $y_0(x)$ — заданная функция из $L^2(\Pi)$.

а) Вывести схему вычисления первой и второй производной по Фреше на всём пространстве $L^2(\Pi)$ терминального функционала ($f(x)$ — заданная функция из $L^2[0,l]$)

$$J(u) = \int\limits_0^l (y(T,x;u) - f(x))^2\ dx.$$

б) В случае, когда граничные условия имеют вид $y(t,0) = u(t)$, $y(t,l) = 0$, $y(0,x) = y_0(x)$, а дифференциальное уравнение имеет вид $y_t(t,x) = a^2 y_{xx}(t,x)$, вывести схему вычисления первой и второй производной по Фреше на всём пространстве $L^2[0,T]$ функционала из пункта а).

5. Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) = a^2 y_{xx}(t,x) + u(t,x), \ (t,x) \in \Pi = (0,T) \times (0,l), \\ y(t,0) = 0, \ y(t,l) = 0, \\ y(0,x) = y_0(x), \ y_t(0,x) = y_1(x), \end{cases}$$

где a — константа, $y_0(x)$ и $y_1(x)$ — заданные функции из $L^2(\Pi)$.

а) Вывести схему вычисления первой и второй производной по Фреше на всём пространстве $L^2(\Pi)$ терминального функционала ($f_0(x)$ и $f_1(x)$ — заданныые функции из $L^2[0,l]$)

$$J(u) = \alpha \int\limits_0^l (y(T,x;u) - f_0(x))^2 \, dx + \beta \int\limits_0^l (y_t(T,x;u) - f_1(x))^2 \, dx.$$

б) В случае, когда граничные условия имеют вид $y(t,0) = u(t)$, $y(t,l) = 0$, $y(0,x) = y_0(x)$, $y_t(0,x) = y_1(x)$, а дифференциальное уравнение имеет вид $y_{tt}(t,x) = a^2 y_{xx}(t,x)$, вывести схему вычисления первой и второй производной по Фреше на всём пространстве $L^2[0,T]$ функционала из пункта а).

5 Выпуклость и сильная выпуклость

1. Исследовать на выпуклость и сильную выпуклость на указанных множествах (в случае наличия сильной выпуклости указать константу сильной выпуклости) следующие функции конечного числа переменных:

$$f(x) = x^p \ (p \in \mathbb{R}^1), \ X = (0,+\infty); \quad f(x) = x + \frac{1}{x}, \ X = (0,+\infty); \quad f(x) = x - \frac{1}{x}, \ X = (0,+\infty);$$

$$f(x) = -\ln x, X = (0,+\infty); \quad f(x) = |\ln x|^p \ (p \in \mathbb{R}^1), \ X_1 = (0,1], X_2 = [1,+\infty], X_3 = (0,+\infty);$$

$$f(x) = (x^2-1)^n \ (n \in \mathbb{N}), \ X = (-\infty,+\infty); \quad f(x) = (\sin x + 1)^p \ (p \in \mathbb{R}^1), \ X = [-\pi, 0];$$

$$J(u) = x^p y^q \ (p,q \in \mathbb{R}^1), \ U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0\};$$

$$J_1(u) = ||Au||^2_{\mathbb{R}^2}, \ J_2(u) = \langle Au, u \rangle_{\mathbb{R}^2}, \ u = (x,y), A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \ U = \mathbb{R}^2.$$

2. Исследовать на выпуклость и сильную выпуклость на указанных пространствах функционалы

$$J(u) = \int\limits_0^1 \rho(t)u^2(t)\ dt,\ \rho(t) \geqslant \rho_0 > 0, \rho(t) \in C[0,1] \text{ в } L^2(0,1);$$

$$J_1(u) = \int\limits_{1/2}^1 u^2(t)\ dt, \quad J_2(u) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t u(\tau)\ d\tau\right)^2 dt, \quad J_3(u) = \int\limits_0^1 u(t)u(1-t)\ dt \text{ в } L^2(0,1);$$

$$J_4(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n}} x_n^2, \quad J_5(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x_n^2, \quad J_6(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot x_{n+1}, \quad J_7(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_{2n-1} + 2x_{2n})^2 \text{ в } \ell^2.$$

6 Проекции

1. Построить проекцию в $L^2(0,T)$ произвольной функции $f(t)$ на конечномерное подпространство $L_h = lin\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$, где $t_i - t_{i-1} = h$ и

$$e_i(t) = \begin{cases} 1,\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Построить проекцию в $H_0^1(0,T)$ произвольной функции $f(t)$ на конечномерное подпространство $L_h^1 = lin\{e_1(t), \dots, e_{N-1}(t)\}$, где $t_i - t_{i-1} = h$ и

$$e_i(t) = \begin{cases} t,\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \\ -t, t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

3. В пространстве l^2 найти проекции двух точек $A = (-6, 2, -2, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ и $B = (6, 3, 6, 0, 0, \dots, 0, \dots$ на множество

$$U = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \middle| \|x\|_{l^2} \leqslant 3,\ x_1 + x_2 \geqslant 0 \right\}.$$

4. В пространстве $L^2(0,\pi)$ найти проекции двух функций $f(t) = -cos(\frac{t}{2})$ и $g(t) = \frac{1}{2}cos(\frac{t}{2})$ на множество

$$U = \left\{ u(t) \in L^2(0,\pi) \middle| \|u\|_{L^2} \leqslant 1,\ \int\limits_0^\pi u(t)dt \leqslant 0 \right\}.$$

5. В пространстве l^2 найти проекции двух точек $x = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{16}}, \frac{1}{\sqrt{32}}, \frac{1}{\sqrt{64}}, \dots\right)$ и $y = (2, 4, 2, \frac{2}{5^{1/2}}, \frac{2}{5^{2/2}}, \frac{2}{5^{3/2}}, \frac{2}{5^{4/2}}, \dots)$ на множество

$$X = \{\|x\|_{l^2} \leqslant 1,\ x_1 + x_2 \geqslant 1\}.$$

6. В пространстве $L^2(0,1)$ найти проекции двух функций $f(t) = 2t^3$ и $g(t) = 2\sin(\pi t)$ на множество

$$U = \left\{ \|u\|_{L^2(0,1)} \leqslant 1, \ \int\limits_0^1 tu(t)dt \geqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

7. Найти проекции точек $u_1 = \cos(2\pi t)$ и $u_2 = 2t$ на множество

$$U = \left\{ u(t) \in L^2(0,1) \middle| \langle c, u \rangle_{L^2(0,1)} \geqslant 1, \ \|u\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant 1 \right\},$$

где $c = 2\sin \pi t, \ \|c\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{2}$.
8. В пространстве $L^2(0,1)$ L_N - подпространство многочленов степени не выше N. Вывести формулу для $pr_{L_N} u$ в случае $N = 2, 3$.